

ХОРНЕРОВА ШЕМА HORNER'S SCHEME

НИКОЛА ГРБИН, VIII разред, Основна школа „Бранко Радичевић“ Панчево,
Регионални центар за таленте „Михајло Пупин“ Панчево

МАРИЈА МИХАЈЛОВ, наставник математике, Регионални центар за таленте
„Михајло Пупин“ Панчево

РЕЗИМЕ

Хорнерова шема представља ефикасан метод за израчунавање полинома свођењем на рачунски погоднију мономијалну форму. Такође се може користити за одређивање корена полинома. Добила је назив по британском математичару Вилијам Џорџ Хорнеру, иако су за њу знали и кинески математичари још у 13. веку.

КЉУЧНЕ РЕЧИ: Полиноми, дељење полинома, Хорнер, Хорнерова шема, Безуова теорема

ABSTRACT

Horner's scheme is an efficient method for calculating polynomials by reducing them to a more computationally convenient monomial form. It can also be used to determine the root of a polynomial. It was named after the British mathematician William George Horner, even though Chinese mathematicians knew about it as early as the 13th century.

KEY WORDS: Polynomials, division of polynomials, Horner, Horner's scheme, Bezu's theorem

УВОД

Функција $P_n(x)$ дефинисана са :

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

где је $n \in \mathbb{N}_0$, $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \in R$, $a_n \neq 0$ назива се полином n -тог степена променљиве x Бројеви $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1$ називају се коефицијенти, а a_0 слободан члан.

Основне рачунске операције са полиномима су сабирање, одузимање, множење и дељење. Поступак који нам омогућава да олакшамо дељење полинома биномом је Хорнерова шема.

Хорнерова биографија

Вилијам Џорџ Хорнер је био британски математичар. Рођен је 9. јуна 1786. у близини Бристола. Школовао се у школи "Kingswood", где је већ са 14 година постао асистент, а са 18 директор. Врло брзо, 1809. основао је сопствену школу "The Classical Seminary" у Самерсету, коју је држао све до своје смрти 22. септембра 1837. године. Хорнерово име се први пут појављује на листи решавалаца математичких задатака у Женском алманаху за 1811. годину, настављајући са узастопним бројевима све до издања 1817. године. Све до броја 1816. године он је наведен као решавалац свих осим неколико од 15 проблема сваке године. Штампано је неколико његових одговора, заједно са два проблема која је он предложио. Доприносио је и другим одељцима алманаха, што показује да је био свестран. 1821. године враћа се у алманах у расправи о Проблему награде.



Слика 1. Вилијам Џорџ Хорнер
Picture 1. William George Horner

Хорнерова шема била је позната Кинезима још у 13. веку, а 1804, свега 15 година пре него што је Хорнер објавио своје откриће у Филозофским трансакцијама Краљевског друштва, Паоло Руфини је освојио златну медаљу Италијанског научног друштва за описивање сличног метода. Хорнерово име постало је везано за методу и било је веома популарно у Енглеској и Америци, углавном као резултат публицитета Хорнеровог рада од стране британског математичара Аугустуса Де Моргана. Још једно Хорнерово откриће јесте зоетроп. То је уређај који ствара илузију покретних слика користећи брзу измену статичких слика.



Слика 2. Зоетроп
Picture 2. Zoetrope

РЕЗУЛТАТИ ИСТРАЖИВАЊА И ДИСКУСИЈА

За свака два ненула полинома $P(x)$ и $Q(x)$, постоје јединствени полиноми $S(x)$ и $R(x)$ такви да је

$$P(x) = Q(x) \cdot S(x) + R(x) \text{ тј.}$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

и важи да је $R(x)$ нула полином или да је степен полинома $R(x)$ мањи од степена полинома $Q(x)$.

Каже се да је $S(x)$ *количник*, а $R(x)$ *остатак* при дељењу полинома $P(x)$ полиномом $Q(x)$.

Ако је $R(x) = 0$, тј. остатак једнак нули, кажемо да је полином $P(x)$ дељив полиномом $Q(x)$ или да полином $Q(x)$ дели полином $P(x)$ и тада је

$$P(x) = Q(x) \cdot S(x)$$

Полином $Q(x)$ је делилац или фактор полинома $P(x)$.

Најпре треба представити поступак дељења полинома.

Пример 1. $(2x^2 - 5x + 6) : (x - 2) = 2x - 1$

$$\begin{array}{r} -(2x^2 - 4x) \quad \downarrow \\ \hline -x + 6 \\ -(-x + 2) \\ \hline 4 \longrightarrow \text{остатак} \end{array}$$

Дакле,

$$\frac{2x^2 - 5x + 6}{x - 2} = 2x - 1 + \frac{4}{x - 2}$$

Пример 2. $(x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x - 5) : (x^2 + 2x - 3) = x^2 - 5x + 15$

$$\begin{array}{r}
 -(x^4 + 2x^3 - 3x^2) \quad \downarrow \\
 \hline
 -5x^3 + 5x^2 + x \\
 -(-5x^3 - 10x^2 - 15x) \quad \downarrow \\
 \hline
 15x^2 - 14x - 5 \\
 -(15x^2 + 30x - 45) \\
 \hline
 -44x + 40 \quad \longrightarrow \text{остатак}
 \end{array}$$

Дакле,

$$\frac{x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x - 5}{x^2 + 2x - 3} = x^2 - 5x + 15 + \frac{-44x + 40}{x^2 + 2x - 3}$$

Енглески математичар Хорнер је направио шему за дељење полинома

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

са биномом $(x - c)$.

Идеју је добио у теорему о једнакости два полинома:

Теорема 1. Два полинома су једнака ако и само ако су истог степена и ако су им коефицијенти уз променљиве истог степена једнаки.

Када поделимо полином $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, који је n -тог степена са биномом $(x - c)$ добија се полином $Q_n(x) = b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \dots + b_1 x + b_0$ који је степена $n - 1$ и остатак r .

$$P_n(x) = (x - c)Q_{n-1}(x) + r$$

Сређујући претходни израз и упоређујући коефицијенте, Хорнер је добио следеће формуле:

$$b_{n-1} = a_n$$

$$b_{k-1} = a_k + c \cdot b_k \quad \text{где је } k = 1, 2, \dots, n - 1$$

$$r = a_0 + c \cdot b_0$$

	a_n	a_{n-1}		a_k		a_0
c	b_{n-1}	$b_{n-2} = a_{n-1} + c \cdot b_{n-1}$		$b_{k-1} = a_k + c \cdot b_k$		$r = a_0 + c \cdot b_0$

ТАБЕЛА 1. Табела коефицијената
TABLE 1. Table of coefficients

Приказаћемо Хорнерову шему на следећем примеру.

Пример 3. Поделити полином $P(x) = 2x^4 - x^3 + 3x^2 - 4x + 1$ са $x - 1$

Решење: Из полинома $P(x) = 2x^4 - x^3 + 3x^2 - 4x + 1$ „прочитамо“ да је:

$a_4 = 2$ јер је то коефицијент уз највећи степен x^4

$a_3 = -1$ јер је то коефицијент уз степен x^3

$a_2 = 3$ јер је то коефицијент уз степен x^2

$a_1 = 4$ јер је то коефицијент уз x

$a_0 = 1$ јер је то члан без x (слободан члан)

а из бинома $x - 1$ да је $c = 1$.

У табелу са Хорнеровом шемом

	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
c	b_3	b_2	b_1	b_0	r

ТАБЕЛА 2. Табела коефицијената
TABLE 2. Table of coefficients

Можемо да заменимо вредности коефицијената. Добијамо табелу:

	2	-1	3	-4	1
1	b_3	b_2	b_1	b_0	r

ТАБЕЛА 3. Табела уз пример 3
TABLE 3. Table with example 3

На основу Хорнерових формула, даље можемо да рачунамо коефицијенте:

$$b_{n-1} = a_n$$

$$b_{k-1} = a_k + c \cdot b_k \quad \text{где је } k = 1, 2, \dots, n-1$$

$$r = a_0 + c \cdot b_0$$

$$b_3 = a_4$$

$$b_3 = 2$$

$$b_2 = a_3 + c \cdot b_3$$

$$b_2 = -1 + 1 \cdot 2 = 1$$

$$b_1 = a_2 + c \cdot b_2$$

$$b_1 = 3 + 1 \cdot 1 = 4$$

$$b_0 = a_1 + c \cdot b_1$$

$$b_0 = -4 + 1 \cdot 4 = 0$$

$$r = a_0 + c \cdot b_0$$

$$r = 1 + 1 \cdot 0 = 1$$

	2	-1	3	-4	1
1	2	1	4	0	1

ТАБЕЛА 4. Табела уз пример 3
TABLE 4. Table with example 3

Дакле добија се полином: $2x^3 + x^2 + 4x$ и остатак 1.

$$2x^4 - x^3 + 3x^2 - 4x + 1 = (x - 1) \cdot (2x^3 + x^2 + 4x) + 1$$

или другачије записано

$$\frac{2x^4 - x^3 + 3x^2 - 4x + 1}{x-1} = 2x^3 + x^2 + 4x + \frac{1}{x-1}$$

Хорнерова шема може да се користи за израчунавање вредности $P_n(c)$ полинома $P_n(x)$ у тачки c . Из једнакости $P_n(x) = (x - c)Q_{n-1}(x) + r$ за $x = c$ добијамо $P_n(c) = r$. Што значи да је остатак дељења $P_n(x)$ са биномом $(x - c)$ једнак $P_n(c)$.

Једна од предности овог начина рачунања вредности полинома $P_n(x)$ у тачки $x = c$ је мањи број операција. Ако би смо рачунали стандарно било би нам потребно n операција сабирања и $\frac{n(n+1)}{2}$ операција множења, док је за Хорнеров алгоритам потребно n операција сабирања и n операција множења.

Примена Хорнерове шеме

Хорнеров алгоритам се може применити и ако желимо неки реалан број записан у бази са основом b , да запишемо у декадној бази.

Ако је број $(a_n a_{n-1} \dots a_0)$ записан у бази b , тада је број у декадној бази једнак

$$b^n a_n + b^{n-1} a_{n-1} + \dots + b a_1 + a_0$$

Пример 4. Број $(34517)_8$ записати у декадном систему.

Решење: Да бисмо број $(34517)_8$ записали у декадном запису потребно је да израчунамо $3 \cdot 8^4 + 4 \cdot 8^3 + 5 \cdot 8^2 + 1 \cdot 8 + 7$, а то ћемо израчунати помоћу Хорнерове шеме.

	3	4	5	1	7
8	$3=3$	$4+8 \cdot 3=28$	$5+8 \cdot 28=229$	$1+8 \cdot 229=1833$	$7+8 \cdot 1833=14671$

ТАБЕЛА 5. Табела уз пример 4
TABLE 5. Table with example 4

Број записан у декадном систему износи 14671.

Још једна примена Хорнерове шеме јесте брже растављање полинома на чиниоце заједно са коришћењем Безуовог става.

Безуов став: Нека је $P(x)$ полином и c реалан број. Остатак при дељењу полинома $P(x)$ са биномом $x - c$ једнак је $P(c)$, тј. вредности полинома $P(x)$ у тачки $x = c$.

Последица: Полином $P(x)$ је дељив са $x - c$, ако и само ако је $P(c) = 0$.

Пример 5. Применом Безуове теореме испитати да ли је полином

$$P(x) = x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 5x - 3$$

дељив са $x + 1$.

Решење: На основу Безуове теореме је $c = -1$. Заменом у полином $P(x)$ добија се

$$P(-1) = (-1)^4 - 3(-1)^3 + 4(-1)^2 + 5(-1) - 3 = 1 + 3 + 4 - 5 - 3 = 0.$$

Како је вредност полинома $P(x)$ у тачки $x = -1$ једнака 0, следи да је полином $P(x)$ дељив са $x + 1$.

Пример 6. Раставити на чиниоце полином $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ уз помоћ Хорнерове шеме и Безуовог става.

Решење: За растављање на чиниоце Безуовим ставом неопходно је пронаћи нулу полинома, тј. тражимо делилац броја -6 ($1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6$) за који је вредност полинома $P(x) = 0$.

Ако је $x = 1 \Rightarrow P(1) = 1^3 + 2 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 - 6 = 1 + 2 - 5 - 6 = -8 \neq 0 \Rightarrow x = 1$ није нула полинома.

$$\text{За } x = -1 \Rightarrow P(-1) = (-1)^3 + 2 \cdot (-1)^2 - 5 \cdot (-1) - 6 = -1 + 2 + 5 - 6 = 0,$$

Дакле $x = -1$ је нула полинома.

Да бисмо раставили на чиниоце потребно је сада поделити почетни полином са $x + 1$, што ћемо урадити применом Хорнерове шеме:

$$(x^3 + 2x^2 - 5x - 6) : (x + 1)$$

	1	2	-5	-6
-1	1	1	-6	0

ТАБЕЛА 6. Табела уз пример 6
TABLE 6. Table with example 6

$$(x^3 + 2x^2 - 5x - 6) : (x + 1) = x^2 + x - 6$$

Даље је потребно $x^2 + x - 6$ раставити на чиниоце по истом принципу.

Једна нула овог полинома је $x = 2$, па је даље

$(x^2 + x - 6) : (x - 2) = x + 3$, где коефицијенте количника одређујемо по Хорнеровој шеми.

	1	1	-6
2	1	3	0

ТАБЕЛА 7. Табела уз пример 6
TABLE 7. Table with example 6

Почетни полином се може раставити на чиниоце на следећи начин:

$$(x^3 + 2x^2 - 5x - 6) = (x + 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 3).$$

ЗАКЉУЧАК

Предности Хорнерове шеме су њена једноставност и јасноћа прорачуна као и велика брзина проналажења корена. Поред тога, она нам омогућава да лако и визуелно израчунамо вредности полинома и проверимо да ли су одређени бројеви њени корени. Осим предности, Хорнерова шема има и неке недостатке, нпр. потреба да се прво пронађе један корен како би се започео алгоритам, а са великим бројем корена и високим степеном полинома могућности да погрешимо у некој од фази израчунавања су велике.

ЛИТЕРАТУРА

- [1.] Г. Миловановић, Р. Ђорђевић, *"Линеарна алгебра"*, Ниш 2004.
- [2.] З. Томљановић, *"Хорнеров алгоритам и примјене"*, Осјечки математички лист 7, 2007.
- [3.] Н. Динчић, *МАТЕМАТИКА 1, скрипта за студенте физике*, Департман за математику, Природно – математички факултет, Универзитет у Нишу, 2013.
- [4.] Ж. Ивановић, С. Огњановић, *МАТЕМАТИКА 1, Збирка задатака и тестова за I разред гимназија и техничких школа*, Круг, Београд 2003.
- [5.] Б. Боричић, В. Стојановић, З. Каделбург, П. Миличић, *Математика за I. разред средње школе са четири часа недељно*, Завод за уџбенике, Београд 2023.
- [6.] <https://www.matematiranje.in.rs/Visa%20matematika/1.Polinomi%20i%20kompleksni%20brojevi/5.Hornerova%20sema.pdf>
- [7.] <http://imft.ftn.uns.ac.rs/math/uploads/Courses/PiR>
- [8.] <https://edukacija.rs/matematika/srednja-skola/prvi-razred/racionalni-algebarski-izrazi/bezuova-teorema>
- [9.] <https://mirjanaradovicsg.files.wordpress.com/2014/11/bezuov-stav.pdf>
- [10.] <https://www.britannica.com/biography/William-George-Horner>
- [11.] <https://alchetron-com.webpkgcache.com/doc/-/s/alchetron.com/William-George-Horner>